

**5. APROXIMACIONES MATEMÁTICAS PARA  
DEFINIR EL FLUJO DE AGUA SUBTERRÁNEA Y  
EL TRANSPORTE DE SOLUTOS EMPLEADAS  
PARA DELIMITAR PERÍMETROS DE  
PROTECCIÓN DE CAPTACIONES DE  
ABASTECIMIENTO URBANO**

## 5. APROXIMACIONES MATEMÁTICAS PARA DEFINIR EL FLUJO DE AGUA SUBTERRÁNEA Y EL TRANSPORTE DE SOLUTOS EMPLEADAS PARA DELIMITAR PERÍMETROS DE PROTECCIÓN DE CAPTACIONES DE ABASTECIMIENTO URBANO

Los modelos matemáticos de sistemas de aguas subterráneas son representaciones matemáticas de los mismos que incluyen asunciones y simplificaciones, por lo que la validez de sus resultados está directamente relacionada con la efectividad con la que el modelo representa dichos sistemas (California Environmental Protection Agency, 2002). En la figura 2 se esquematizan los aspectos a considerar en la aplicación de un modelo, tanto en el proceso de diseño del *software* como en su aplicación para un propósito específico.

El desarrollo del modelo requiere (California Environmental Protection Agency, 2002), en primer lugar, analizar los procesos hidrogeológicos que afectan al flujo de agua subterránea y al transporte de contaminantes en la misma (Figura 3). En segundo lugar, hay que determinar qué leyes y formulaciones pueden representar matemáticamente un fenómeno hidrogeológico. Así expresiones generales como la Ley de Darcy para flujo laminar de agua subterránea o las leyes de Fick para transporte dispersivo y las funciones de Monod para transformación de contaminantes por biodegradación, permiten representar un área infinitesimal de un sistema dado bajo condiciones ideales.

La aplicación de esas leyes a escala real requiere su conversión a ecuaciones diferenciales para poder considerar variaciones espaciales y temporales, que deben ser resueltas o aproximadas matemáticamente para convertirlas en fórmulas que puedan ser empleadas para cálculos hidrogeológicos. En la mayoría de los casos la solución exacta de una ecuación diferencial representando un fenómeno hidrogeológico no es factible y es mejor obtener una solución aproximada efectuando nuevas asunciones y simplificaciones.

El grado de simplificación depende de la complejidad con que se quiera que el modelo represente el sistema lo que da lugar a tres tipos de modelos (numéricos, analíticos y de parámetros agregados), cuyas principales características son:

### – Modelos numéricos:

Permiten aproximaciones complejas a las ecuaciones diferenciales. Estas hacen posible, por ejemplo, modelar variaciones espaciales del sistema (heterogeneidades y anisotropía) así como variaciones temporales (régimen transitorio).

Los modelos numéricos dividen el sistema de agua subterránea en unidades más pequeñas, hidrogeológicamente representables, efectuando una discretización espacial en bloques u otras unidades geométricas, asignando un nodo a cada una de ellas. Cada uno de esos nodos se considera como un subsistema separado, lo que permite incorporar variabilidad espacial de los parámetros contemplados en el modelo. También dividen el periodo de tiempo simulado en segmentos más pequeños, lo que permite simular régimen permanente y régimen transitorio en diferentes pasos de tiempo.

Estos modelos requieren asignar valores de los parámetros específicos para cada unidad geométrica (celda) requiriéndose una elevada cantidad de datos.

### – Modelos analíticos:

Son apropiados para aproximaciones simplificadas a las ecuaciones diferenciales, para efectuar simulaciones de sistemas simples, sin complejidad espacial ni temporal.

Estos modelos resuelven analíticamente las ecuaciones diferenciales para obtener ecuaciones simples para el flujo y el transporte de contaminantes, proporcionando soluciones exactas a las mismas para lo que requieren que se asuman diversas simplificaciones. Entre estas cabe citar por ejemplo que los límites del sistema de agua subterránea estén localizados en zonas infinitamente lejanas y que el sistema sea homogéneo e isótropo.

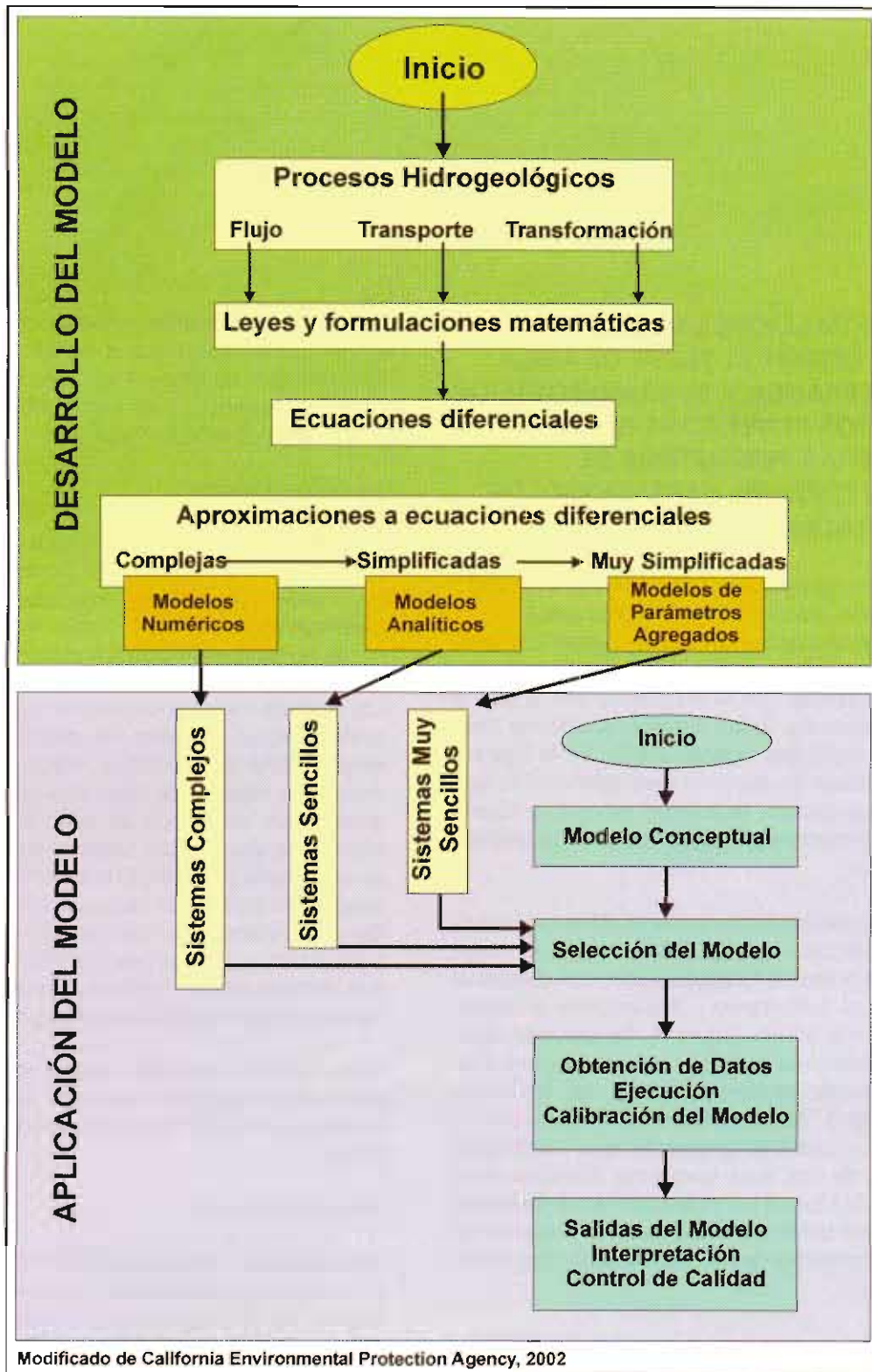
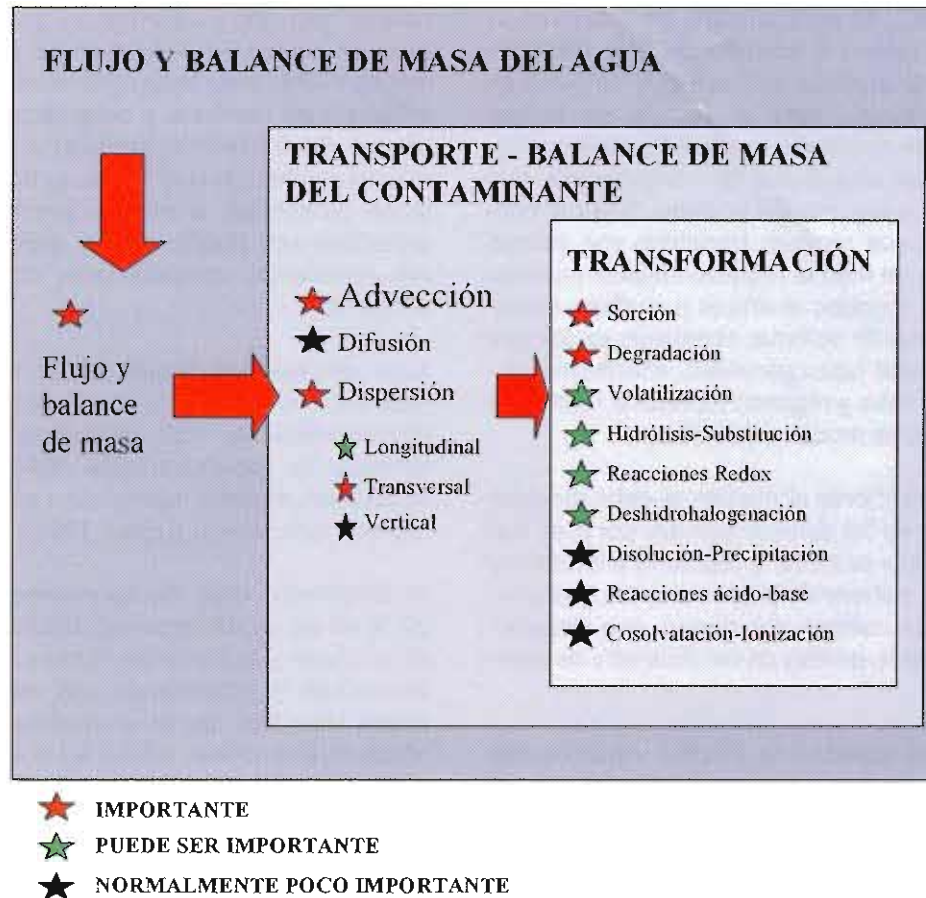


Figura 2: Aspectos a considerar en la aplicación de un modelo matemático a sistemas de aguas subterráneas.



Modificada de California Environmental Protection Agency, 2002.

**Figura 3:** Procesos hidrogeológicos que afectan al flujo de agua subterránea y al transporte de contaminantes.

Los modelos analíticos simples consideran todo el sistema como una única unidad y todo el periodo de tiempo simulado como un único paso de tiempo. Los modelos de elementos analíticos y modelos semianalíticos dividen el sistema en unidades hidrogeológicas y permiten considerar diferentes pasos de tiempo.

Aunque estos modelos requieren una cantidad de datos variable, dependiendo del modelo elegido, son mucho más simplistas que los modelos numéricos.

– Modelos de parámetros agregados:

Consideran que el sistema a simular está compuesto por diversos elementos. Cada uno, incluyendo el agua subterránea existente en el mismo, se considera que es homogéneo e isótropo y puede simularse mediante una ecuación simple. Las variaciones temporales pueden simularse solamente entre compartimentos, no dentro de ellos.

Permiten simular por ejemplo las condiciones transitorias que ocurren en el límite entre la zona vado-

sa y la zona saturada pero no pueden simularse las condiciones transitorias dentro de cada una de esas zonas. Requieren pocos datos reales usando datos genéricos proporcionados por el modelo.

Una vez adoptada la aproximación seleccionada se convierten las fórmulas resultantes en los códigos informáticos que constituyen el "software".

La aplicación del modelo a un sistema de agua subterránea específico (Figura 2) requiere, en primer lugar, desarrollar un modelo conceptual. La formulación de un modelo conceptual aceptable y realista es la etapa más importante en la aplicación de un modelo. Debe incluir, además de las simplificaciones del medio físico y condiciones de contorno, el objetivo del modelo y como alcanzarlo.

La siguiente etapa consiste en seleccionar de los diferentes modelos existentes, públicos y comerciales (numéricos, analíticos o de parámetros agregados), cuyas principales características han sido descritas previamente, el que se ajuste mejor al modelo conceptual y complejidad del sistema en lugar de seleccionarlo en base a la disponibilidad de datos

(Konikow, 1986). Así por ejemplo si un sistema es un acuífero homogéneo e isótropo de flujo predominantemente horizontal y se prevé que funcione en régimen estacionario para el periodo de tiempo simulado puede emplearse un modelo analítico simple para simular una pluma de contaminante que afecte a la zona superior del acuífero. Si por el contrario cabe esperar régimen transitorio con cambio en la dirección de flujo se requiere emplear modelos semianalíticos, modelos analíticos o modelos numéricos. En el caso de sistemas complejos en los que deba considerarse heterogeneidad, anisotropía, flujos tridimensionales y régimen transitorio solamente pueden emplearse modelos numéricos.

Después de seleccionar el modelo se debe proceder a la obtención de los datos requeridos por éste, ejecutar el modelo y proceder a calibrarlo e interpretar los resultados, elaborando posteriormente auditorías o controles de calidad del mismo que deberían incluir, entre otros, análisis de sensibilidad y de incertidumbre.

En los modelos analíticos se efectúa, como ha sido previamente detallado, una simplificación de las características hidrogeológicas del acuífero y de las condiciones de explotación siendo necesario introducir condiciones muy estrictas (pozos totalmente penetrantes, acuífero de extensión infinita...) que pueden alejarse sensiblemente de la realidad, por lo que para la delimitación de las zonas de restricciones que afectan a zonas más alejadas de la captación, resulta más conveniente la utilización de modelos numéricos (empleándose también habitualmente para estos la denominación de modelos matemáticos), cuando se dispone de información adecuada

para su ejecución y calibrado, ya que estos permiten tener en cuenta variaciones en los principales parámetros hidráulicos, heterogeneidades del acuífero, influencia de bombeos y otros factores, por lo que ofrecen resultados más similares al funcionamiento real del acuífero, lo cual facilita su traslado a la regulación urbanística, al eliminar problemas de sobreprotección que podrían causar pleitos con actividades restringidas indebidamente en el ámbito del perímetro.

Estas ventajas han llevado a que sean empleados cada vez con mayor frecuencia. Así el 80 % de los aproximadamente 800 perímetros de protección definidos en Inglaterra hasta 1994 se delimitaron empleando modelos numéricos bidimensionales en régimen estacionario (Foster, 1994).

En Dinamarca, cuyo abastecimiento se basa en un 99 % en aguas subterráneas (Madsen, 1994), se ha desarrollado y aplicado un modelo matemático que abarca toda la extensión del país, empleando el programa *Mike She*, que es un modelo de agua subterránea tridimensional, utilizando una malla de 1 km<sup>2</sup> y una discretización vertical en 7 a 9 capas (Madsen *et al.*, 1998), empleándose desde entonces como herramienta básica para la delimitación de los perímetros de protección.

En Estados Unidos los organismos *United States Geological Survey* (USGS) y *United States Environmental Protection Agency* (USEPA) emplean como modelos estándar para delimitar perímetros de protección los programas MODFLOW y MODPATH. Estos programas son también ampliamente utilizados por diferentes organismos en otros países.